

Дидактический материал
по теме «Решение квадратных
уравнений, 8 класс»

Подготовила:
Кабанова О.В., учитель математики
ГБОУ «ШКОЛА № 22 Г.О.ГОРЛОВКА»

Справочный материал

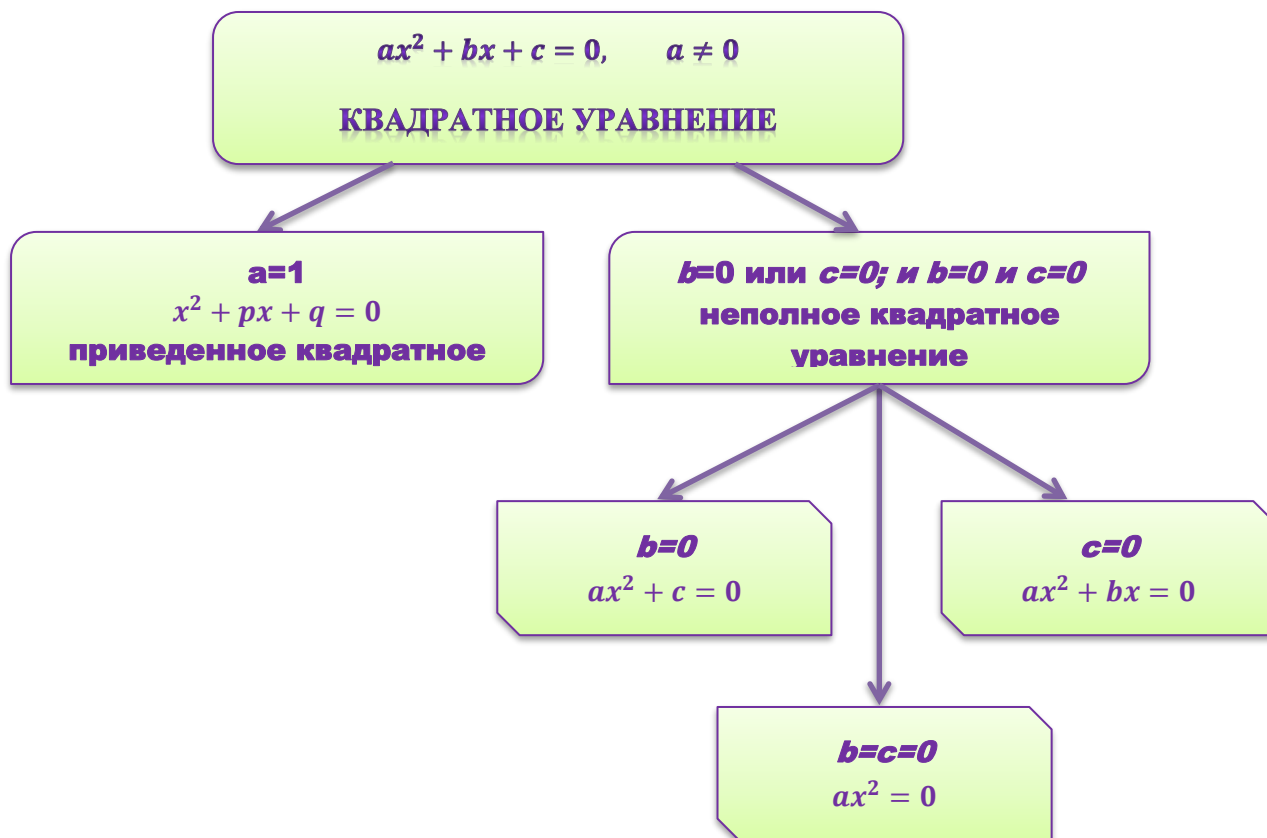
для использования учителями и обучающимися при изучении темы:
«Квадратное уравнение и его корни» 8 класс

1. **Квадратным уравнением** называют **уравнение** вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c – заданные числа, $a \neq 0$, x – неизвестное.
2. Коэффициенты a , b и c квадратного уравнения называют так:
 a – первым или старшим коэффициентом, b – вторым коэффициентом, c – свободным членом.

Пример

В уравнении $4x^2 + 5x + 1 = 0$ старший коэффициент $a = 4$, второй коэффициент $b = 5$, а свободный член $c = 1$.

3. **Корнями квадратного уравнения** называют такие значения переменной, при которых квадратное уравнение обращается в верное числовое равенство.
4. **Решить квадратное уравнение** — значит найти все его корни или установить, что корней нет.
5. **Виды квадратных уравнений** (в зависимости от значения коэффициентов)



6. Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ называют **неполным**, если хотя бы один из коэффициентов b и c равен нулю или оба коэффициента b и c равны нулю.
7. **Неполное квадратное уравнение при $c=0$ имеет вид $ax^2 + bx = 0$, где $a \neq 0; b \neq 0$.**

В левой части этого уравнения есть **общий множитель x** . Вынесем **общий множитель x** за скобки.

Мы получим $x(ax+b)=0$. Произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю. Поэтому получаем $x=0$ или $ax+b=0$. Таким образом, данное уравнение эквивалентно двум уравнениям:

$$\begin{cases} x = 0, \\ ax + b = 0. \end{cases}$$

Решаем получившуюся систему уравнений.

Решив эту систему, мы получим $x = 0$ и $x = -\frac{b}{a}$. Следовательно, данное квадратное уравнение имеет два корня $x = 0$ и $x = -\frac{b}{a}$.

Пример:

$$4x^2 - 8x = 0$$

Разложим левую часть уравнения на множители и найдем корни:

$$4x(x-2) = 0$$

$$4x = 0 \text{ или } x - 2 = 0$$

$$\begin{cases} 4x = 0, \\ x - 2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0, \\ x = 2. \end{cases}$$

Ответ: 0; 2.

8. Неполное квадратное уравнение при $b=0$ имеет вид $ax^2 + c = 0$, где $a \neq 0$, $c \neq 0$. Для решения данного неполного квадратного уравнения выразим x^2 :

$$ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 = -c \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a}.$$

При решении последнего уравнения возможны два случая:

если $-\frac{c}{a} > 0$, то получаем два корня: $x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}};$

если $-\frac{c}{a} < 0$, то уравнение во множестве действительных чисел не имеет решений.

Пример:

$$4x^2 - 144 = 0$$

$$4x^2 = 144$$

$$x^2 = 144 : 4$$

$$x^2 = 36$$

$$x = 6 \text{ и } x = -6$$

Ответ: 6; -6.

Пример:

$$3x^2 + 75 = 0$$

$$3x^2 = -75$$

$$x^2 = -75 : 3$$

$x^2 = -25$ в этом случае уравнение не имеет решения.

Ответ: нет корней.

9. Неполное квадратное уравнение при $b=0$ и $c=0$ имеет вид $ax^2 = 0$, $a \neq 0$.

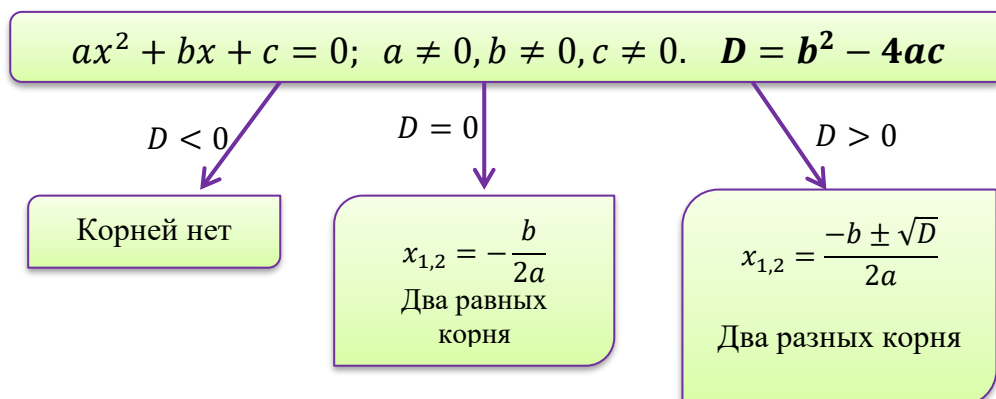
Разделим обе части уравнения на a , мы получим $x^2 = 0$. Таким образом, данное квадратное уравнение имеет один корень $x = 0$. В этом случае говорят, что квадратное уравнение имеет двукратный корень $x = 0$.

10. Способы решения полных квадратных уравнений

Решение с помощью дискриминанта:

Дискриминантом квадратного уравнения D называется выражение $b^2 - 4ac$, т.е. $D = b^2 - 4ac$.

При решении уравнения с помощью дискриминанта возможны три случая:



1) $D > 0$. Тогда корни уравнения равны:

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}; \quad x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Пример 1.

$$2x^2 - 7x + 3 = 0$$

$$a=2, b=-7, c=3$$

$$D = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 49 - 24 = 25 > 0 \text{ (уравнение имеет два корня)}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{7+5}{2 \cdot 2} = \frac{12}{4} = 3, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{7-5}{2 \cdot 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2}; 3$$

2) $D = 0$. В данном случае решение даёт два двукратных корня: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$

Пример 2.

$$9x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$a=9, b=-6, c=1$$

$$D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 36 - 36 = 0 \text{ (говорят, что уравнение имеет один корень)}$$

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2 \cdot 9} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{3}.$$

3) $D < 0$. В этом случае уравнение не имеет решения.

Пример 3.

$$5x^2 - 8x - 4 = 0$$

$$a=5, b=-8, c=-4$$

$$D = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \cdot (-8) \cdot (-4) = 64 - 128 = -64 < 0 \text{ (уравнение не имеет корней)}$$

$$\text{Ответ: нет корней.}$$

11. Рассмотрим решение квадратного уравнения вида $ax^2 + 2mx + c = 0$, где $a \neq 0, b = 2m$.

В этом случае дискриминант уравнения будет равен $D_1 = m^2 - ac$, а корни

$$\text{уравнения } x_1 = \frac{-m + \sqrt{D_1}}{a}; \quad x_2 = \frac{-m - \sqrt{D_1}}{a}$$

Пример:

$$5x^2 - 8x - 4 = 0$$

$$5x^2 - 2 \cdot 4x - 4 = 0$$

$$a=5, m=4, c=-4$$

$$D_1 = m^2 - ac = 4^2 - 5 \cdot (-4) = 16 + 20 = 36$$

$$x_1 = \frac{4 + \sqrt{36}}{5} = \frac{4 + 6}{5} = 2; \quad x_2 = \frac{4 - \sqrt{36}}{5} = \frac{4 - 6}{5} = -\frac{2}{5}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{2}{5}; 2$$

12. Решение квадратного уравнения методом выделения полного квадрата.

Для решения квадратных уравнений применяется метод выделения полного квадрата. Решая уравнение данным методом, мы преобразуем его так, что в левой части получился квадрат двучлена $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ или $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, а правая часть не содержит неизвестное.

Пример 1:

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1 - 1 - 3 = (x + 1)^2 - 4$$

$$(x + 1)^2 = 4$$

$$x + 1 = 2 \text{ и } x + 1 = -2$$

$$x = 2 - 1 = 1 \text{ и } x = -2 - 1 = -3$$

$$\text{Ответ: } -3; 1$$

Пример 2:

$$4x^2 - 8x - 12 = 0$$

$$4x^2 - 2 \cdot 2x \cdot 2 + 4 - 4 - 12 = (2x - 2)^2 - 16$$

$$(2x - 2)^2 = 16$$

$$2x - 2 = 4 \text{ или } 2x - 2 = -4$$

$$2x = 4 + 2 \quad 2x = -4 + 2$$

$$2x = 6 \quad 2x = -2$$

$$x = 6 : 2 \quad x = -2 : 2$$

$$x = 3 \quad x = -1$$

$$\text{Ответ: } -1; 3.$$

13. Решение приведенного квадратного уравнения.

Квадратное уравнение вида $x^2 + px + q = 0$ называется приведенным квадратным уравнением ($a=1$).

1) Теорема Виета: Если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, то справедливы формулы $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 x_2 = q$, т.е. сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

Пример:

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$p=2, q=-15$$

$$\text{если } x_1 + x_2 = -p \text{ и } x_1 x_2 = q, \text{ то } x_1 + x_2 = -2 \text{ и } x_1 x_2 = -15. \text{ Значит } x_1 = 3 \text{ и } x_2 = -5.$$

$$\text{Ответ: } 3; -5.$$

Всякое квадратное уравнение может быть приведено к виду $x^2 + px + q = 0$ делением обеих частей на коэффициент a .

2) Теорема, обратная теореме Виета

Если m и n такие, что $m + n = -p$, а $m \cdot n = q$, тогда m и n — корни уравнения

$$x^2 + px + q = 0$$

3) Теорема Виета для неприведённого уравнения

Если x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Пример

$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

Имеем два корня ($D > 0$)

$$x_1 + x_2 = \frac{2}{3};$$

$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{3}$$

14. Решение квадратного уравнения методом коэффициентов:

а) Если в квадратном уравнении *сумма коэффициентов равна 0*, то первый корень равен *единице*, а второй равен *с, деленному на а*.

Если $a+b+c=0$, то $x_1=1$ и $x_2 = \frac{c}{a}$.

Пример:

$$5x^2 - 8x + 3 = 0$$

$$a=5, b=-8, c=3$$

$$a+b+c=5+(-8)+3=0, \text{ значит } x_1=1 \text{ и } x_2 = \frac{3}{5}.$$

Ответ: $1; \frac{3}{5}$.

б) Если в квадратном уравнении *сумма коэффициентов а и с равна коэффициенту b*, то первый корень равен *минус единице*, а второй равен *минус с, деленному на а*.

Если $a+c=b$, то $x_1=-1$ и $x_2 = -\frac{c}{a}$.

Пример:

$$6x^2 + 10x + 4 = 0$$

$$a=6, b=10, c=4$$

$$a+c=b, \text{ то } x_1=-1 \text{ и } x_2 = -\frac{c}{a}. \text{ Видим, что } 6+4=10, \text{ значит } x_1=-1 \text{ и } x_2 = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}.$$

Ответ: $-1; -\frac{2}{3}$.

15. План решения задач на составление уравнений

- I. Одну из неизвестных величин обозначить буквой (x), остальные – выразить через x .
- II. Учитывая условие задачи и соотношение между величинами, составить уравнение.
- III. Решить полученное уравнение.
- IV. Объяснить найденные корни соответственно условию задачи.
- V. Записать ответ.

Дидактический материал

для использования учителями при рассмотрении темы:
«Квадратное уравнение и его корни» 8 класс.

Литература:

1. Учебник Алгебра. 8 класс, Ю.Н. Макарычев, «Просвещение», 2013
2. Дидактический материал: Алгебра. 8 класс, А.П. Ершова, «Гимназия», 2000г.

I. Дидактический материал к урокам № 1- № 2

Найти корни уравнения:

- 1) $4x^2 - 9 = 0$
- 2) $-x^2 + 3 = 0$
- 3) $-0,1x^2 + 10 = 0$
- 4) $y^2 - \frac{1}{9} = 0$
- 5) $6x^2 + 24 = 0$
- 6) $3m^2 - 1 = 0$

Решить уравнения:

- | | |
|---------------------|----------------------|
| 1. $3x^2 - 4x = 0$ | 9. $5a^2 - 4a = 0$ |
| 2. $-5x^2 + 6x = 0$ | 10. $7a - 14a^2 = 0$ |
| 3. $10x^2 + 7x = 0$ | 11. $1 - 4y^2 = 0$ |
| 4. $4a^2 - 3a = 0$ | 12. $2x^2 - 6 = 0$ |
| 5. $6m^2 - m = 0$ | 13. $2x^2 - 18 = 0$ |
| 6. $2y + y^2 = 0$ | 14. $x^2 + 2x = 0$ |
| 7. $2x^2 + 3x = 0$ | 15. $4x^2 = 0$ |
| 8. $3x^2 - 2 = 0$ | |

16. $4x^2 - 11 = x^2 - 11 + 9x$
17. $2 = 7x^2 + 2$
18. $(2x + 1)(x - 4) = (x - 2)(x + 2)$
19. $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{9}x = 0$
20. $(2x - 1)^2 = 1 - 4x$
21. $3 - (4x + 1)(3 - x) = x^2$
22. $4x^2 - 3x + 7 = 2x^2 + x + 7$
23. $(x + 3)(x - 4) = -12$
24. $x^2 - 5 = (x + 5)(2x - 1)$
25. $2x - (x + 1)^2 = 3x^2 - 6$
26. $x^2 - (2x - 3)(1 - x) = 3$

Задачи: 1) Произведение двух последовательных целых чисел в 1,5 раза больше квадрата меньшего из них. Найти эти числа.

2) Теннисный корт представляет собой прямоугольную площадку, длин которой вдвое больше ширины, а площадь равна 800 м^2 . Найти длину и ширину корта.

3) Ширина земельного участка, имеющего форму прямоугольника, составляет 75% его длины, а его площадь равна 4800 м^2 . Найти длину забора, ограждающего этот участок.

II. Дидактический материал к уроку № 3

Решить уравнения выделением полного квадрата двучлена

1. $x^2 + x - 6 = 0$

2. $x^2 - 2x - 8 = 0$

3. $x^2 + 5x = 14$

4. $x^2 + 7x = 18$

Графическое решение уравнений вида: $ax^2 + bx + c = 0$

5. $x^2 - x - 2 = 0$

$x^2 = x + 2$

$y = x^2; y = x + 2$

6. $x^2 - 3x + 2 = 0$

$x^2 = 3x - 2$

$y = x^2; y = 3x - 2$

7. $x^2 + x - 2 = 0$

$x^2 = -x + 2$

$y = x^2; y = -x + 2$

8. $x^2 - x - 6 = 0$

$x^2 = x + 6$

$y = x^2; y = x + 6$

III. Дидактический материал к урокам № 4 - № 6

Вычислить дискриминант квадратного уравнения и указать число его корней.

1) $2x^2 + 3x + 1 = 0$

3) $9x^2 + 6x + 1 = 0$

2) $2x^2 + x + 2 = 0$

4) $x^2 + 5x - 6 = 0$

Решить уравнения:

1. $5y^2 - 6y + 1 = 0$

11. $-2t^2 + 8t + 2 = 0$

2. $4x^2 + x - 33 = 0$

12. $-3t^2 - 12t + 6 = 0$

3. $y^2 - 10y - 24 = 0$

13. $2y^2 - 2y + 0,5 = 0$

4. $a^2 + a - 90 = 0$

14. $8y^2 + 4y + 0,5 = 0$

5. $14x^2 - 5x - 1 = 0$

15. $-15 = 3x(2 - x)$

6. $2x^2 + x + 67 = 0$

16. $10x = 5(x^2 - 4)$

7. $2y^2 - y - 5 = 0$

17. $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

8. $16x^2 - 8x + 1 = 0$

18. $y^4 - 6y^2 + 8 = 0$

9. $x^2 + 7x - 44 = 0$

19. $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

10. $9y^2 + 6y + 1 = 0$

20. $9x^4 - 9x^2 + 2 = 0$

$$21. (2x - 3)^2 = 11x - 19$$

$$23. \frac{x^2+x}{2} = \frac{8x-7}{3}$$

$$22. \frac{x^2-1}{2} - 11x = 11$$

При каких значениях x равны значения многочленов?

$$1) (x + 1)^2 \text{ и } 7x - 3x^2$$

$$2) (x - 1)^2 \text{ и } 2x - 2x^2$$

$$3) (2 - x)(2x + 1) \text{ и } (x - 2)(x + 2)$$

$$4) (1 - 3x)(x + 1) \text{ и } (x - 1)(x + 1)$$

$$5) x^2 - \frac{3x-1}{2} \text{ и } x - 1$$

$$6) x^2 - \frac{2x-1}{3} \text{ и } 2x + 4$$

IV. Дидактический материал к урокам № 7 - № 8

1. Одно из двух натуральных чисел больше другого на 5. Найти эти числа, если их произведение равно 24.
2. Одно из двух натуральных чисел меньше другого на 6. Найти эти числа, если их произведение равно 27.
3. В прямоугольном треугольнике один из катетов на 7 см больше другого. Найти периметр треугольника, если его гипотенуза 13 см.
4. Ширина прямоугольника на 6 см меньше длины, а его площадь равна 40 см². Найти стороны прямоугольника.
5. Найти длины сторон прямоугольника, периметр которого равен 32 см, а площадь 55 см².
6. Когда от квадратного листа фанеры отрезали прямоугольную полосу шириной 2 м, площадь листа составила 24 м². Найти первоначальную площадь листа.
7. Площадь доски прямоугольной формы равна 4500 см². Доску распилили на две части, одна из которых представляет собой квадрат, а другая – прямоугольник. Найти сторону получившегося квадрата, если длина отпиленного прямоугольника равна 120 см.
8. В кинотеатре число мест в ряду на 8 больше числа рядов. Сколько рядов в кинотеатре, если всего в нем имеется 884 места?

V. Дидактический материал к урокам № 9 - № 10

➤ Найти сумму и произведение корней уравнения

$$1) x^2 - 37x + 27 = 0$$

$$2) x^2 + 41x - 371 = 0$$

$$3) x^2 - 15x - 16 = 0$$

$$4) 2x^2 - 9x - 10 = 0$$

$$5) 7x^2 - x - 8 = 0$$

$$6) 6x^2 + x - 7 = 0$$

➤ Найти корни уравнения и выполните проверку по теореме, обратной теореме Виета:

$$1) x^2 - 2x - 9 = 0$$

$$2) 3x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$3) 2x^2 + 7x - 6 = 0$$

$$4) 2x^2 + 9x + 8 = 0$$

5) $x^2 - 6x - 11 = 0$

6) $12x^2 - 4x - 1 = 0$

➤ Найти подбором корни уравнения

1) $x^2 + 3x - 18 = 0$

2) $x^2 - 2x - 24 = 0$

3) $x^2 - 12x + 20 = 0$

4) $x^2 - 7x + 12 = 0$

5) $x^2 + 20x + 36 = 0$

6) $x^2 + 14x + 24 = 0$

➤ Один из корней данного уравнения равен 2. Найти второй корень и коэффициент a .

1) $x^2 + ax - 12 = 0$

2) $x^2 - 7x + a = 0$

➤ Один из корней данного уравнения равен 4. Найти второй корень и число a .

1) $x^2 + x - a = 0$

2) $x^2 - ax - 8 = 0$

➤ Составьте квадратное уравнение, корни которого равны:

1) -5 и 8

2) 9 и -41

3) -3 и $-\frac{1}{3}$

4) -2 и $-\frac{1}{2}$

5) $2 + \sqrt{3}$ и $2 - \sqrt{3}$

6) $1 - \sqrt{2}$ и $1 + \sqrt{2}$

➤ Разность корней квадратного уравнения $x^2 + x + c = 0$ равна 6. Найти c .

➤ Сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 3x + a = 0$ равна 65. Найти a .

➤ Уравнение $x^2 + 5x + t = 0$ имеет корни x_1 и x_2 . Найти, при каком значении t :

а) сумма квадратов корней равна 35.

б) сумма кубов корней равна 40.